

# **DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS E ANÁLISE DE MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO**

**EDNILSON SOUZA**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

EDNILSON SÉRGIO RAMALHO DE SOUZA

DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE  
CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS E ANÁLISE DE  
MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO

TCF - 080603

BELÉM  
2007

**EDNILSON SÉRGIO RAMALHO DE SOUZA**

**DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE  
CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS E ANÁLISE DE  
MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
para obtenção do grau de Licenciatura em Física  
do Departamento de Física da Universidade  
Federal do Pará.

Área de concentração: Termodinâmica  
Clássica.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Maia de  
Jesus Chaves Neto.

**BELÉM  
2007**

© 2024 Edição brasileira  
by Autopub Editora  
© 2024 Texto  
by Autor  
Todos os direitos reservados

Autopub Editora  
CNPJ 54.303.895/0001-62  
Telefone: 9198473-5110  
contato@autopubeditora.com  
Ed. Rogério Fernandez Business Center - Tv. Quintino Bocaiúva, 2301 - Batista Campos,  
Belém - PA, 66045-315  
www.autopubeditora.com

**Editor-Chefe**

Prof. Dr. Ednilson Ramalho

**Projeto editorial**

autopubeditora.com

**Revisão, diagramação e capa**

Autor

**Bibliotecária**

Janaina Karina Alves Trigo Ramos

CRB-8/009166

**Produtor editorial**

Rosy Borges

**Conselho Editorial**

Prof. Dr. Ednilson Souza - Especialista em Educação Científica e Matemática

Prof. Dra. Ana Silva - Especialista em Ciências Sociais

Prof. Dr. Carlos Mendes - Pesquisador em Ciências Naturais

Prof. Dra. Sofia Almeida - Especialista em Psicologia

Prof. Dr. Miguel Santos - Pesquisador em Economia

**Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)**

S725

Dedução da equação tridimensional de condução de calor em sólidos e análise de métodos para resolução / Ednilson Sergio Ramalho de Souza. – Belém: Autopub, 2024.

Arquivo em PDF  
36 p.

ISBN 978-65-83093-07-3

DOI 10.46898/autopub.b0377602-1104-4fe7-9d86-ceb02ebe9b0f

1. Condução de calor. 2. Equação tridimensional. 3. Métodos de resolução. 4. Sólidos. I. Souza, Ednilson Sergio Ramalho de. II. Título.

CDD 536.2

Índice para catálogo sistemático

I. Condução de calor.



Para Rosy, Pryscila e  
Laiane.

O sentido de meu  
viver.

## AGRADECIMENTOS

À energia consciente que governa todo o universo, a qual me concedeu a oportunidade de realizar este trabalho.

Ao Doutor professor Maia, que me acolheu com seu bondoso coração.

À minha esposa e filhas que, mesmo reclamando, entenderam a minha ausência do lar.

Ao meu pai, minha mãe e irmãos.

E a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a subida deste degrau.

Descubra a técnica e  
serás um vencedor!

Ednilson Souza.

## RESUMO

Dedução da equação tridimensional que caracteriza a condução de calor em sólidos a partir da Primeira Lei da Termodinâmica e a análise de métodos empregados para resolvê-la. A abordagem utiliza a observação de fenômenos físicos da condução de calor e o posterior equacionamento matemático. É feito um estudo sobre a lei de Fourier para a condução de calor unidimensional e também sobre a Primeira Lei da Termodinâmica. A análise de alguns casos particulares da equação geral de condução de calor é realizada com o intuito de apresentar alguns métodos empregados para resolver tais equações.

Palavras-chave: Dedução. Equação tridimensional. Condução de calor.

## ABSTRACT

Deduction of the three-dimensional equation that characterizes the conduction of heat in solids from the First Law of the Thermodynamics and the analysis of used methods to decide it. The boarding uses the comment of physical phenomena of the conduction of heat and the future mathematical solution. A study on the law of Fourier for the conduction of one-dimensional heat and also on the First Law of the Thermodynamics is made. The analysis of some particular cases of the general equation of conduction of heat is carried through with intention to present some used methods to decide such equations.

**Key-Word:** Deduction. Three-dimensional equation. Conduction of heat.



## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
CAPÍTULO 1: A LEI DE FOURIER PARA A CONDUÇÃO DO CALOR.....	11
CAPÍTULO 2: A PRIMEIRA LEI DE TERMODINÂMICA .....	14
CAPÍTULO 3: DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS EM COORDENADAS CARTESIANAS .....	16
CAPÍTULO 4: CONDIÇÕES PARTICULARES PARA A EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DE CALOR .....	22
4.1 CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME PERMANENTE .....	22
4.2 CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME TRANSITÓRIO .....	22
CAPÍTULO 5: MÉTODOS DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR (CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL) .....	24
5.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA (SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS) .....	24
5.2 MÉTODO GRÁFICO .....	27
5.3 MÉTODO NUMÉRICO .....	31
5.3.1 Elementos Finitos .....	32
5.4 MÉTODO ANALÓGICO .....	33
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	35
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	36

## INTRODUÇÃO

No mundo tecnológico em que vivemos a dissipação do calor pelas maquinarias é um problema de fundamental importância, pois é sempre desejado alcançar um rendimento máximo dos componentes que compõem essas máquinas, assim como da própria máquina com um todo.

O estudo aprofundado de como o calor se propaga pelas estruturas sólidas, isto é, a obtenção da distribuição de temperatura em função das coordenadas espaciais e do tempo é imprescindível para se entender melhor a causa dos problemas das máquinas térmicas.

O objetivo deste trabalho é deduzir, de forma simples e com o mínimo de cálculos complexos, a equação em função das coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e do tempo que caracteriza a condução de calor nos sólidos, bem como fazer um breve comentário sobre os métodos empregados para resolver tal equação.

Começaremos apresentando a dedução empírica da lei de resfriamento de Newton e a seguir a equação de Fourier para a condução de calor unidimensional. Logo depois faremos um breve estudo sobre a primeira lei da termodinâmica, a qual será de fundamental importância para cumprir com o nosso objetivo. Continuaremos fazendo a dedução propriamente dita da equação tridimensional da condução de calor nos sólidos, seguida da análise de algumas situações particulares que envolvem essa equação. Finalizaremos o trabalho comentando sobre algumas técnicas que são utilizadas para resolver a equação acima referida.



## CAPÍTULO 1: A LEI DE FOURIER PARA A CONDUÇÃO DO CALOR

É importante compreender que a análise matemática de uma situação ou processo físico como a condução de calor em sólidos se baseia, em último momento, num conhecimento empírico do fenômeno envolvido. O físico deve começar por algum lugar, a bem dizer, e este lugar é indicado pela experiência.

No caso da condução de calor, demonstrou-se muitas vezes que se duas placas paralelas de mesma área  $A$  e temperaturas diferentes  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, estiverem separadas por uma pequena distância  $d$  (veja Fig. 1.1), uma quantidade de calor por unidade de tempo passará da mais quente para a mais fria. Além disso, num alto grau de aproximação, esta quantidade de calor é proporcional à área  $A$ , à diferença de temperatura  $|T_2 - T_1|$  e inversamente proporcional à distância de separação  $d$  [2].

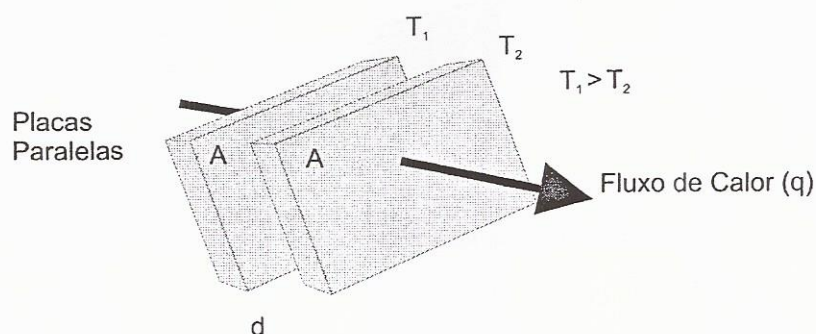


Figura 1.1 Fluxo de calor entre placas paralelas.

Portanto, a dedução empírica do fluxo de calor ( $q$ ) é

$$q = \frac{KA / T_2 - T_1 /}{d} \quad (1.1)$$

Onde o fator de proporcionalidade  $K$  é denominado *condutibilidade térmica* e depende somente do material entre as duas placas. Na verdade,  $K$  também depende da temperatura, mas se a faixa de temperatura for muito grande, será satisfatório supormos que  $K$  independe da temperatura.

A lei física representada pela Eq. 1.1 é conhecida como lei de resfriamento de Newton. Vale repetir que esta equação é um resultado empírico, não teórico, e que pode ser, como tem sido frequentemente, verificado por experimentação cuidadosa.

Ela é a base para a equação de Fourier de condução de calor em sólidos. Temos ainda que  $q$  nesta equação representa o fluxo de calor, ou seja, a razão entre a quantidade de calor propagada através de uma superfície e o intervalo de tempo gasto. Deste modo,

$$q = \frac{Q}{\Delta T} \quad (1.2)$$

Consideraremos, agora, uma barra retilínea de seção transversa uniforme e de material homogêneo, orientada de modo que o eixo  $x$  se situe ao longo do eixo da barra e faremos  $x = 0$  e  $x = l$  representarem os extremos da barra. Consideraremos também que os lados da barra sejam perfeitamente isoladas de modo que não haja passagem de calor através deles. Observe a Fig. 1.2

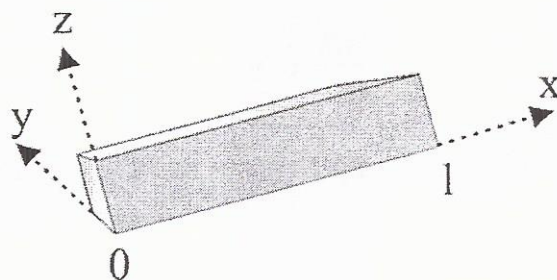


Figura 1.2 Barra retilínea de seção transversa.

Note que as quatro superfícies laterais são adiabáticas, isto é, perfeitamente isoladas e, deste modo, a transferência de calor só pode ocorrer na direção  $x$  [1]. Finalmente, consideraremos que a temperatura  $T$ , depende somente da posição axial  $x$  e do tempo  $t$  e não depende das coordenadas  $y$  e  $z$ . Em outras palavras, consideraremos que a temperatura  $T(x, t)$  permaneça constante em qualquer seção transversa da barra. Esta hipótese usualmente é satisfatória quando as dimensões laterais do bastão são pequenas comparadas ao seu comprimento.

Vamos nos concentrar em um elemento da barra, situada, entre as posições  $x_0$  e  $x_0 + \Delta x$ , onde  $x_0$  é arbitrário e  $\Delta x$  é pequeno, veja Fig. 1.3.



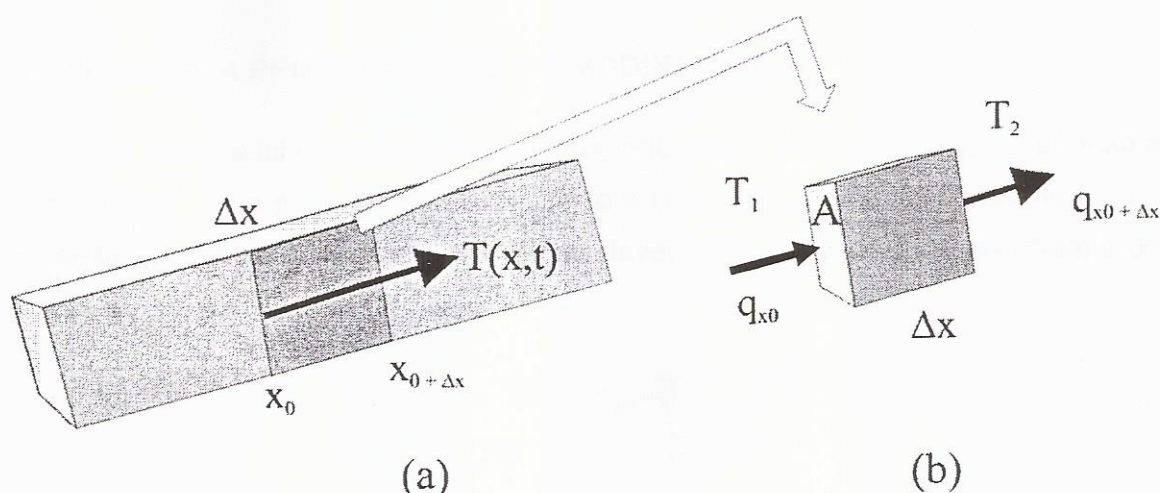


Figura 1.3 (a) barra com elemento  $\Delta x$ , (b) elemento da barra.

A Eq. 1.1 pode ser escrita da seguinte maneira.

$$q = -\frac{KA\Delta T}{\Delta X} \quad (1.3)$$

O sinal menos nesta equação significa que o calor flui da parte mais quente para a parte mais fria [7].

Fazendo agora a dimensão  $\Delta X$  tender a zero na Eq. 1.3, obtém-se

$$q = -KA \frac{\partial T}{\partial X} \quad (1.4)$$

que é a lei de Fourier para a condução de calor em sólidos. Esta relação foi proposta pelo cientista francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830), em 1822. Ela estabelece que o fluxo de calor  $q$  num ponto do elemento da barra é proporcional ao gradiente de temperatura nesse ponto.

## CAPÍTULO 2: A PRIMEIRA LEI DE TERMODINÂMICA

A primeira lei da termodinâmica é um enunciado da conservação da energia a um sistema. Esse princípio de conservação afirma que a soma algébrica de toda a energia que cruza a fronteira do sistema deve ser igual à variação da energia do sistema.

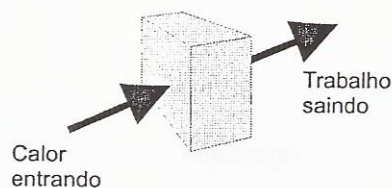


Figura 2.1 Convenção de sinais para a primeira lei da termodinâmica.

como o calor e o trabalho são as únicas formas de energia que podem atravessar uma fronteira de sistema [4] (ver Fig 2.1), pode-se escrever a primeira lei do seguinte modo

$$Q - W = \Delta E \quad (2.1)$$

Onde  $W$  é o trabalho efetuado pelo sistema,  $Q$  é a quantidade de calor que cruza a fronteira e  $\Delta E$  é a variação de energia do sistema.

Há muitos processos reais que dependem do tempo. Se as propriedades mudam a uma pequena taxa em relação ao tempo, a hipótese de processo quase – estático é válida. A primeira lei escrita em termos de taxa é útil na resolução de muitos problemas. A primeira lei nesses termos é

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dE}{dt} \quad (2.2)$$

Onde  $\dot{Q}$  é a taxa de transferência de calor, ou seja, a energia transferida por unidade de tempo, através da fronteira na forma de calor,  $\dot{W}$  é a potência, a taxa em que a energia está atravessando a fronteira como trabalho e  $dE / dt$  é a taxa de variação da energia do sistema por unidade de tempo.

Se um sistema está em regime permanente, não há variação de energia cinética ou potencial, de maneira que a primeira lei da termodinâmica pode assim ser escrita

$$Q - W = \Delta U \quad (2.3)$$

Ou, na forma de taxas

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dU}{dt} \quad (2.4)$$

Onde  $U$  é a energia interna e representa a energia que as moléculas da substância possuem graças às suas energias cinética e potencial a nível microscópico.



### CAPÍTULO 3: DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Consideraremos um pequeno elemento de material isotrópico e homogêneo num corpo sólido, como mostrado na Fig 3.1.

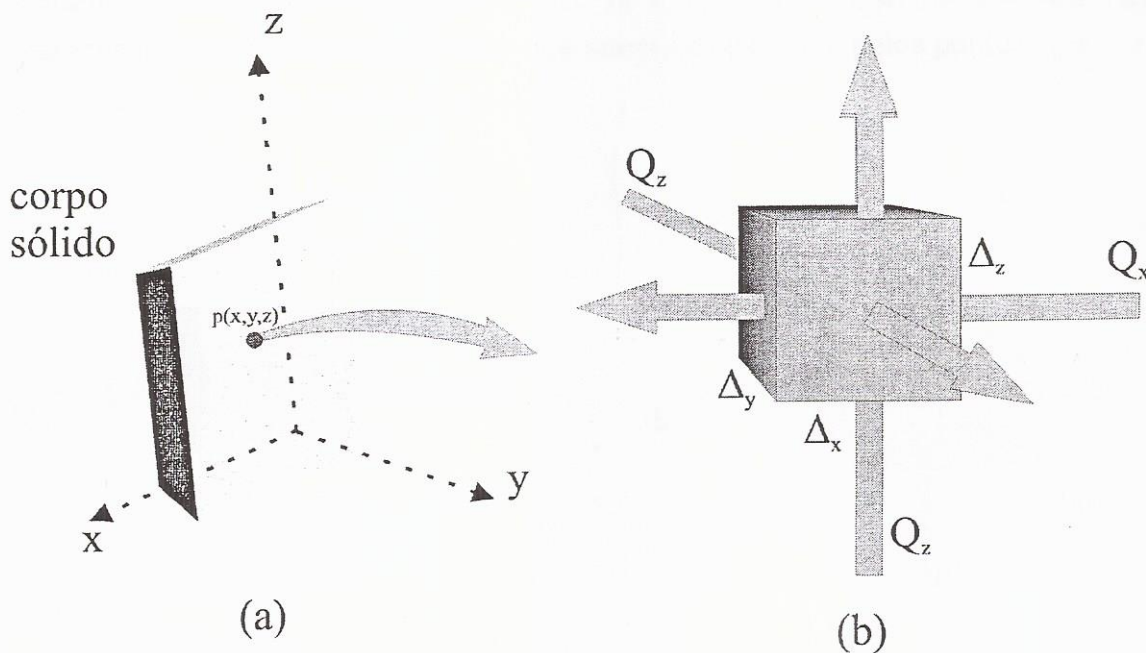


Figura 3.1 (a) Corpo sólido, (b) Elemento de material isotrópico e homogêneo

O elemento tem forma de um paralelepípedo, de lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  paralelos, respectivamente, aos eixos coordenados x, y e z. A análise da condução num paralelepípedo é mais simples se utilizamos o sistema de coordenadas cartesianas.

A aplicação da primeira lei da termodinâmica (Eq. 2.3), para o elemento infinitesimal, com volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , mostrado na Fig. 3.1 (b) fornece [1]

$$(Q_x + Q_y + Q_z) - W = \Delta U \quad (3.1)$$

Os termos  $Q_x$ ,  $Q_y$  e  $Q_z$  representam as quantidades de calor propagadas através do elemento sólido na direção positiva, respectivamente, aos eixos x, y e z. W representa o trabalho realizado pelo sistema (energia cedida pelo sistema) e  $\Delta U$  é a variação de energia interna do sistema.

As quantidades de calor  $Q_x$ ,  $Q_y$  e  $Q_z$  podem ser escritos da seguinte forma

$$Q_x = Q_{x0} - Q_{x0 + \Delta x} \quad (3.2a)$$

$$Q_y = Q_{y0} - Q_{y0 + \Delta y} \quad (3.2b)$$

$$Q_z = Q_{z0} - Q_{z0 + \Delta z} \quad (3.2c)$$

Onde as quantidades  $Q_{x0}$ ,  $Q_{y0}$  e  $Q_{z0}$ , representam as quantidades de calor que entram, respectivamente, nos pontos  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ ;  $Q_{x0 + \Delta x}$ ,  $Q_{y0 + \Delta y}$  e  $Q_{z0 + \Delta z}$  representam as quantidades de calor que saem devidamente pelos pontos  $x_0 + \Delta x$ ,  $y_0 + \Delta y$  e  $z_0 + \Delta z$ , ver figura 3-2 (a).

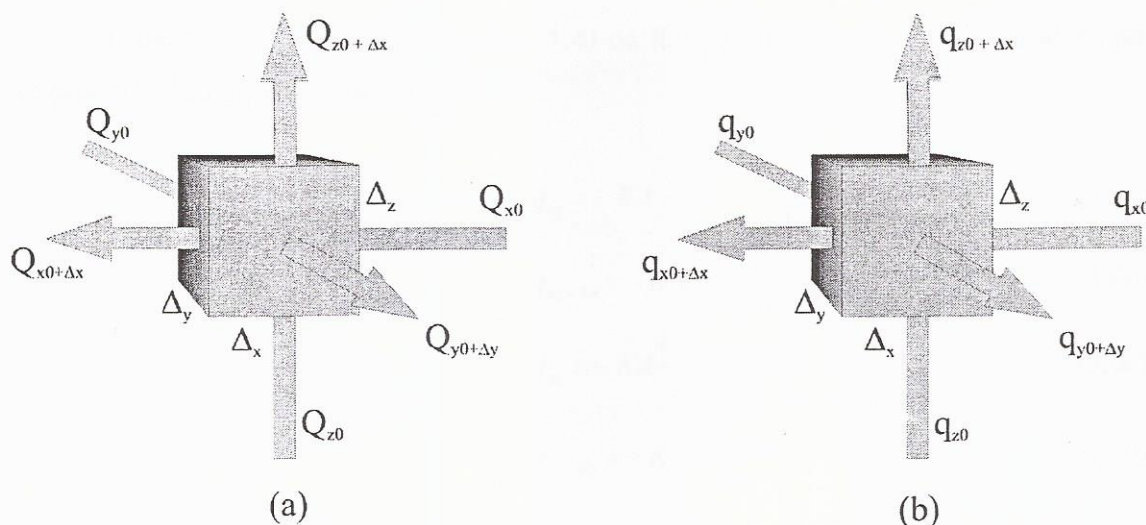


Figura 3.2 (a) Quantidades de calor entrando e saindo através das faces do elemento sólido, (b) Fluxos de calor através do elemento sólido.

Substituindo-se as relações em (3.2) na Eq. 3.1 obtém-se

$$(Q_{x0} - Q_{x0 + \Delta x}) + (Q_{y0} - Q_{y0 + \Delta y}) + (Q_{z0} - Q_{z0 + \Delta z}) - W = \Delta U \quad (3.3)$$

Dividindo-se esta equação pelo intervalo de tempo  $\Delta t$ , obteremos

$$(q_{x0} - q_{x0 + \Delta x}) + (q_{y0} - q_{y0 + \Delta y}) + (q_{z0} - q_{z0 + \Delta z}) - \frac{w}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} \quad (3.4)$$

Onde na passagem acima foi usado a Eq. 1.2. Os termos  $q_{x0}$ ,  $q_{y0}$  e  $q_{z0}$  representam os fluxos de calor (ou as taxas de transferência local de calor) nos pontos do elemento localizados, respectivamente em  $x_0$ ,  $y_0$  e  $z_0$ . Os termos  $q_{x0 + \Delta x}$ ,  $q_{y0 + \Delta y}$  e  $q_{z0 + \Delta z}$  representam as taxas de transferência local de calor nos pontos do elemento localizados, respectivamente, em  $x_0 + \Delta x$ ,  $y_0 + \Delta y$  e  $z_0 + \Delta z$ , observe a Fig. 3.2 (b).



Tomando-se, agora, o limite para o intervalo de tempo  $\Delta t$  tender a zero na Eq. 3.4, obtém-se

$$(q_{x0} - q_{x0+\Delta x}) + (q_{y0} - q_{y0+\Delta y}) + (q_{z0} - q_{z0+\Delta z}) - \dot{w} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.5)$$

Onde  $\dot{w}$  representa a taxa em que a energia está atravessando a fronteira como trabalho, ou seja,  $\dot{w}$  é a taxa de transferência de trabalho  $\partial U / \partial t$  é a taxa de variação da energia do sistema por unidade de tempo e é expressa como uma derivada parcial porque  $U$  não é apenas função de  $x$ , mas também de  $y$ ,  $z$  e  $t$  [4].

Usando-se a lei de Fourier (Eq. 1.4) os fluxos de calor da Eq. 3.5 podem ser expressos da seguinte maneira

$$q_{x_0} = -KA \frac{\partial T_{x_0}}{\partial x} \quad (3.6a)$$

$$q_{x_0+\Delta x} = -KA \frac{\partial T_{x_0+\Delta x}}{\partial x} \quad (3.6b)$$

$$q_{y_0} = -KA \frac{\partial T_{y_0}}{\partial y} \quad (3.6c)$$

$$q_{y_0+\Delta y} = -KA \frac{\partial T_{y_0+\Delta y}}{\partial y} \quad (3.6d)$$

$$q_{z_0} = -KA \frac{\partial T_{z_0}}{\partial z} \quad (3.6e)$$

$$q_{z_0+\Delta z} = -KA \frac{\partial T_{z_0+\Delta z}}{\partial z} \quad (3.6f)$$

Substituindo-se as relações em (3.6) na Eq. 3.5 teremos

$$\left( KA \frac{\partial T_{x_0+\Delta x}}{\partial x} - KA \frac{\partial T_{x_0}}{\partial x} \right) + \left( KA \frac{\partial T_{y_0+\Delta y}}{\partial y} - KA \frac{\partial T_{y_0}}{\partial y} \right) + \left( KA \frac{\partial T_{z_0+\Delta z}}{\partial z} - KA \frac{\partial T_{z_0}}{\partial z} \right) - \dot{W} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.7)$$

Ou

$$KA \frac{\partial}{\partial x} (\Delta T_x) + KA \frac{\partial}{\partial y} (\Delta T_y) + KA \frac{\partial}{\partial z} (\Delta T_z) - \dot{W} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (3.8)$$

Onde os termos  $\Delta T_x, \Delta T_y$  e  $\Delta T_z$  representam a variação local de temperatura nas direções x, y e z, respectivamente.

Para prosseguir a dedução da equação de condução de calor, teremos que fazer duas considerações na Eq. 3.8

A primeira modificação é motivada pelo fato de que, na maioria dos casos, o sinal referente a  $\dot{w}$ , a taxa de transferência de calor, é negativa. Assim nós utilizaremos a relação [1]

$$\dot{W} = -A \Delta X \Delta Y \Delta Z \dot{q} \quad (3.9)$$

e denominaremos  $\dot{q}$  de taxa de geração interna de calor no sólido, isto é, a conversão de alguma forma de energia (elétrica, química, etc) em energia térmica.

A segunda modificação é que vamos considerar a energia interna do material da barra como a única forma de energia relevante para o problema, pois a energia interna está uniformemente distribuída na massa [4], logo

$$U = Mu \quad (3.10)$$

Onde u é a energia interna específica e M é a massa do elemento sólido. Esta equação ainda pode ser escrita da seguinte maneira

$$U = \rho A \Delta X \Delta Y \Delta Z u \quad (3.11)$$

Onde  $\rho$  é a massa específica do material e  $\rho A \Delta X \Delta Y \Delta Z$  é a massa do elemento em análise. Lembrando que a variação da energia interna específica, u, das substâncias incompressíveis é proporcional à variação de temperatura [6],  $\Delta T$ , podemos escrever

$$\Delta u = C \Delta T \quad (3.12)$$

Onde o fator de proporcionalidade C é o calor específico do sólido. Escrevendo-se as Eqs. 3.11 e 3.12 na forma diferencial e combinando-as, obtém-se

$$dU = \rho A \Delta X \Delta Y \Delta Z C dT \quad (3.13)$$

dividindo-se, agora, esta equação pelo intervalo de tempo,  $dt$ , obtém-se

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho A \Delta x \Delta y \Delta z C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.14)$$

Onde foi admitido que as variações de temperatura que ocorrem no sólido são suficientemente pequenas para que o calor específico  $C$  possa ser considerado constante (em geral  $C$  é uma função da temperatura). Observe, também que foi utilizado o símbolo de derivada parcial porque a temperatura no sólido é uma função de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ .

Substituindo as Eqs 3.9 e 3.14 na Eq. 3.8 obtém-se

$$KA \frac{\partial}{\partial x}(\Delta T_x) + KA \frac{\partial}{\partial y}(\Delta T_y) + KA \frac{\partial}{\partial z}(\Delta T_z) + A \Delta x \Delta y \Delta z \dot{q} = \rho A \Delta x \Delta y \Delta z C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.15)$$

ou, eliminando a área  $A$  e suprimindo os índices da temperatura,  $T$ , uma vez que a mesma, como já foi dito, é função de três variáveis espaciais e uma temporal, temos

$$K \frac{\partial}{\partial x}(\Delta T) + K \frac{\partial}{\partial y}(\Delta T) + K \frac{\partial}{\partial z}(\Delta T) + \Delta x \Delta y \Delta z \dot{q} = \rho \Delta x \Delta y \Delta z C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.16)$$

Dividindo-se esta equação pelo elemento de volume  $\Delta x \Delta y \Delta z$ , obtém-se

$$K \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Delta T}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\Delta T}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right) + K \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Delta T}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.17)$$

Se tomarmos o limite para o elemento de volume  $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$ , obteremos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.18)$$

Note que esta equação foi obtida aplicando-se algumas considerações na equação da primeira lei da termodinâmica. Obtivemos uma equação a derivadas parciais referente ao campo de temperaturas  $T_{(x,y,z)}$ , que é conhecida como equação geral da condução de calor em coordenadas cartesianas.



Os termos  $\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial T}{\partial y} \right)$  e  $\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial T}{\partial z} \right)$  representam, respectivamente, as transferências líquidas de calor nas direções x, y e z, ou seja, a diferença entre o fluxo de calor transferido ao sistema e o fluxo de calor que transferido do sistema. O termo  $\rho C \frac{\partial T}{\partial t}$  representa a inércia térmica, que provoca um efeito retardante, ou seja, a inércia térmica mostra que é preciso uma transferência líquida de calor positiva para obtermos um aumento na temperatura de uma quantidade finita de massa (no caso onde a geração interna de calor  $\dot{q}$  é nula). Quando esta taxa de transferência de calor é fixa, a taxa de aumento de temperatura é mais alta quanto mais baixo for o valor do produto  $\rho C$ . O grupo  $\rho C$  representa a inércia térmica por unidade de volume ou a capacidade térmica do meio [1].

## CAPÍTULO 4: CONDIÇÕES PARTICULARES PARA A EQUAÇÃO GERAL DE CONDUÇÃO DE CALOR

### 4.1 CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME PERMANENTE

Quando as condições de contorno são independentes do tempo, a distribuição de temperatura no sólido é uma função somente das coordenadas espaciais. A Eq. 3.18 reduz-se às seguintes formas.

- Regime permanente, condutibilidade térmica constante e sem geração interna de calor (equação de Laplace)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

- Regime permanente, condutibilidade térmica constante e com geração interna de calor (equação de Poisson)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{K} = 0 \quad (4.2)$$

### 4.2 CONDUÇÃO DE CALOR EM REGIME TRANSITÓRIO

Se as condições de contorno térmicas são dependentes do tempo, a distribuição de temperatura no sólido é descrita como função, além das coordenadas espaciais, da coordenada temporal. A Eq. 3.18 assume as seguintes formas:

- Regime transitório, condutibilidade térmica constante e sem taxa de geração interna de calor (equação de Fourier)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.3)$$

Onde o novo coeficiente do lado direito desta equação,  $\alpha$ , é denominado difusibilidade térmica do material e é definido do seguinte modo

$$\alpha = \frac{K}{\rho C} \quad (4.4)$$

A difusibilidade térmica de  $\alpha$  será admitida constante porque foi admitido que  $p$ ,  $C$  e  $K$  apresentam valores constantes.

- Regime transitório, condutibilidade térmica constante e com taxa de geração interna de calor [3]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.5)$$



## CAPÍTULO 5: MÉTODOS DE SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR (CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL)

### 5.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA (SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS)

Consideraremos uma placa retangular fina, sem geração interna de calor e isolada nas superfícies superior (Fig. 5.1). Desse modo  $\partial T / \partial z$  é desprezível, e a temperatura é função somente de  $x$  e  $y$ .

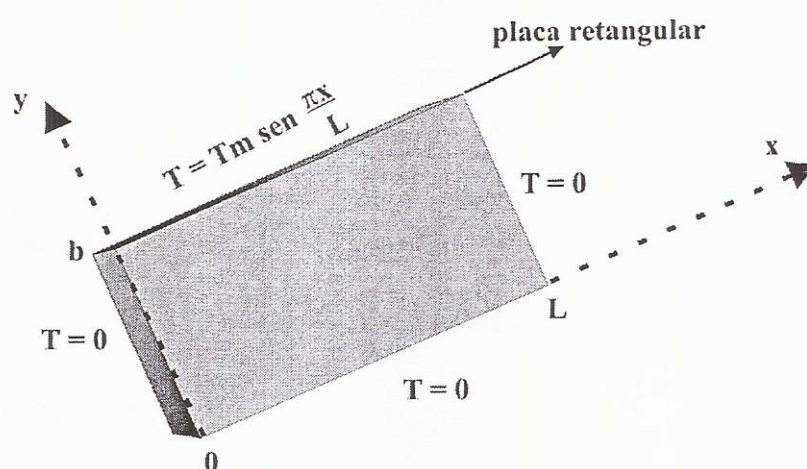


Figura 5.1 Placa retangular fina.

Se a condutibilidade térmica é uniforme, a distribuição de temperatura deve satisfazer a equação de Laplace.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (5.1)$$

Essa é uma equação de derivadas parciais, linear e homogênea, que pode ser integrada admitindo-se uma solução – produto para  $T(x,y)$  da forma

$$T = XY \quad (5.2)$$

Onde  $X = X(x)$  é uma função apenas de  $x$ , e  $Y = Y(y)$  é uma função apenas de  $y$ . substituindo-se a Eq. 5.2 na Eq. 5.1, obtém-se



$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (5.3)$$

As variáveis agora estão separadas. O lado esquerdo da equação é uma função apenas de  $x$ , enquanto que o lado direito é uma função apenas de  $y$ . Como nenhum lado pode variar quando  $x$  e  $y$  variam, ambos devem ser iguais a uma constante, digamos  $\lambda^2$ . Desse modo, temos duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (5.4)$$

e

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (5.5)$$

a solução geral da Eq. 5.4 é

$$X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad (5.6)$$

e a solução geral da Eq. 5.5 é

$$Y = C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y} \quad (5.7)$$

Então da Eq. 5.2

$$T = XY = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) (C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}) \quad (5.8)$$

Onde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são constantes a serem determinadas das condições de contorno. Como mostra a Fig 5.1, as condições de contorno a serem satisfeitas são

$$T = 0 \quad \text{em } y=0 \quad (5.9a)$$

$$T = 0 \quad \text{em } x=0 \quad (5.9b)$$

$$T = 0 \quad \text{em } x=L \quad (5.9c)$$

Substituindo as condições de contorno dados por (5.9) na Eq. 5.8 para  $T$  obtemos, da primeira condição,

$$(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) (C + D) = 0, \quad (5.10)$$

da segunda condição

$$A (C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}) = 0, \quad (5.11)$$

e, da terceira condição

$$(A \cos \lambda L + B \sin \lambda L) (C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}) = 0 \quad (5.12)$$

A Eq. 5.10 pode ser satisfeita somente se  $C = -D$ , e a Eq. 5.11 pode ser satisfeita somente se  $A = 0$ . Usando esses resultados na Eq. 5.12, obtemos

$$(B \sin \lambda L) C (e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}) = 2BC \sin \lambda L \sinh \lambda y = 0 \quad (5.13)$$

Para satisfazer essa condição,  $\sin \lambda L$  deve ser zero ou  $\lambda = \frac{n\pi}{L}$ , onde  $n = 1, 2, 3$ , etc. Existe, portanto, uma solução diferente para cada  $n$  inteiro e cada solução tem sua constante de integração  $C_n$ . Somando essas soluções, temos

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L} \quad (5.14)$$

A última condição de contorno exige que, para  $y=b$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi b}{L} = T_m \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (5.15)$$

de modo que somente o primeiro termo na solução por série é necessário com

$C_1 = \frac{T_m}{\sinh(\pi b / L)}$ . A solução então é

$$T_{(x,y)} = T_m \frac{\sinh(\pi y / L)}{\sinh(\pi b / L)} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (5.16)$$

O campo de temperaturas correspondente é mostrado na Fig. 5.2.

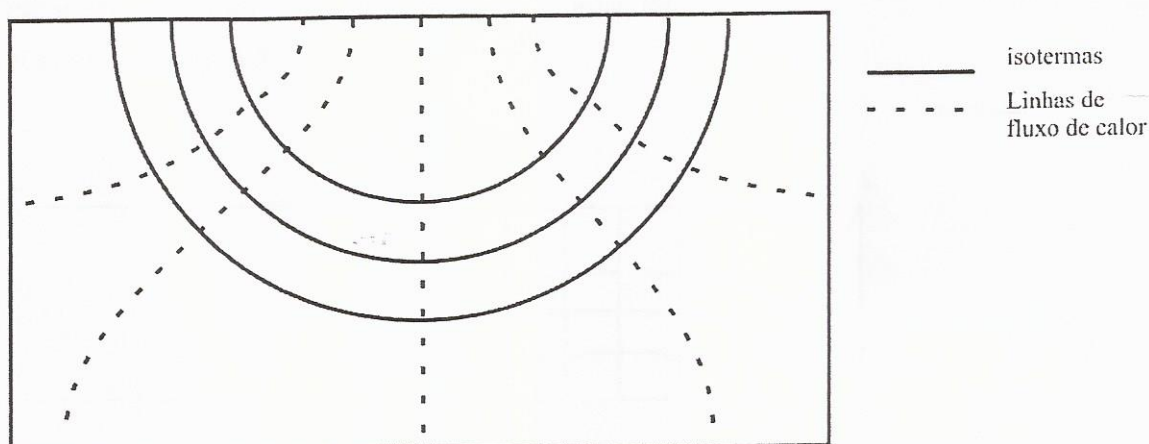


Figura 5.2 Campo de temperatura  $T_m = \frac{\sinh(\pi y / L)}{\sinh(\pi b / L)} \sin \frac{\pi x}{L}$ .

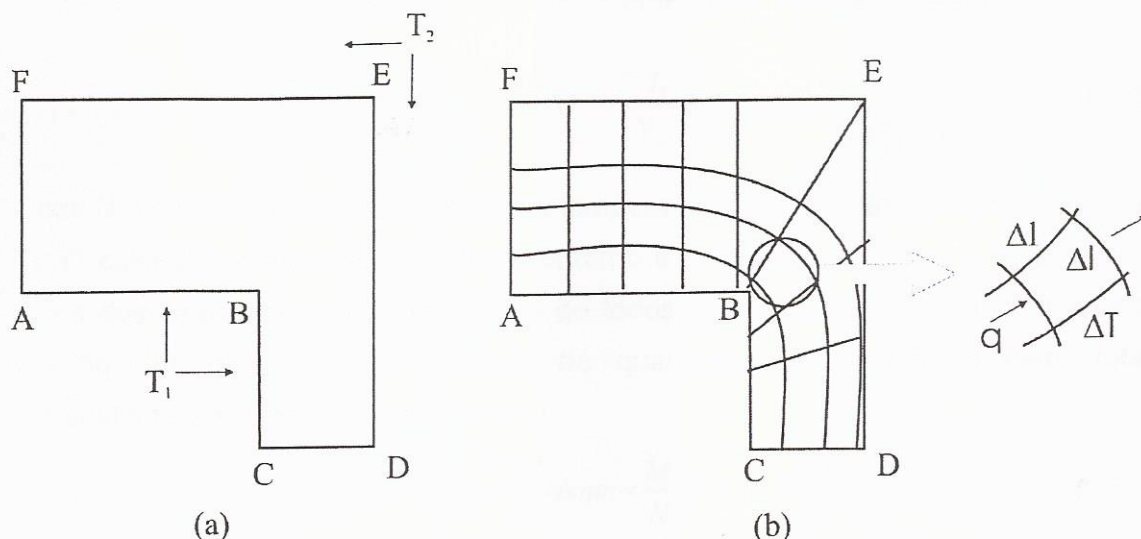
As linhas cheias são as isotérmicas, e as tracejadas são as linhas de fluxo de calor. Deve ser ressaltado que as linhas que indicam a direção do fluxo de calor são perpendiculares às isotérmicas.

## 5.2 MÉTODO GRÁFICO

Atualmente, a taxa de transferência de calor por condução em corpos com geometria complicada é determinada com métodos numéricos (computacionais). Antes da era dos computadores, o método gráfico era utilizado para estimar o valor da taxa de transferência de calor em corpos com geometria complicada (por exemplo, com contornos curvados). Esse método é efetivo e proporciona um bom entendimento do modo como o calor é transferido em corpos complexos. O objetivo de uma solução gráfica é construir uma rede consistindo em isotérmicas (linhas de temperatura constante) e linhas de fluxo de calor constante. As linhas de fluxo de calor são análogas às linhas de corrente, num escoamento potencial, isto é, elas são tangentes à direção do fluxo de calor em qualquer ponto. Consequentemente, nenhuma quantidade de calor pode cruzar as linhas de fluxo de calor, e uma quantidade constante de calor é transmitida entre duas linhas de potencial constante e o calor é transmitido perpendicularmente a elas. Então, linhas de temperatura constante e linhas de fluxo de calor constante se intersectam em ângulos retos. Para obter a distribuição de temperatura, preparamos inicialmente um modelo em escala e, então, desenharias, à mão livre, por tentativas, isotérmicas e linhas de fluxo de



calor até elas formarem uma rede de quadrados curvilíneos. O procedimento está ilustrado na Fig. 5.3 .



**Figura 5.3** (a) Secção em canto de espessura unitária, (b) Rede de isotermas e linhas de fluxo de calor, (c) Quadrado curvilíneo.

para uma seção em canto de espessura unitária, com faces ABC à temperatura  $T_1$ , faces FED à temperatura  $T_2$ , e faces CD e AF isoladas. A Fig 5.3 (a) mostra o modelo em escala, e a Fig 5.3 (b) apresenta a rede de isotérmicas e linhas de fluxo de calor. Deve-se notar que as linhas de fluxo de calor que emanam dos contornos isotérmicos são perpendiculares ao contorno, exceto quanto provém de um canto. As linhas de fluxo de calor que deixam ou atingem um canto de um contorno isotérmico bissectam o ângulo entre as superfícies que formam a ângulo.

Uma solução gráfica, bem como uma solução analítica de um problema de condução de calor descrito pela equação de Laplace e pelas condições de contorno associadas, é única. Desse modo, qualquer rede curvilínea (qualquer que seja o tamanho dos quadrados) que satisfaz as condições de contorno representa a solução correta [3]. Tomando-se qualquer quadrado curvilíneo, por exemplo, Fig 5.3 (c), o calor transmitido por unidade de tempo é dado pela lei de Fourier

$$\Delta q = -K(\Delta l \cdot 1) \frac{\Delta T}{\Delta l} = -K\Delta T \quad (5.17)$$

Esse calor transmitido é o mesmo através de qualquer quadrado numa faixa qualquer formada por duas linhas de fluxo de calor desde o contorno em  $T_1$  até o contorno em  $T_2$ . O  $\Delta T$  através de qualquer elemento na faixa é

$$\Delta T = \frac{T_2 - T_1}{N} \quad (5.18)$$

Onde  $N$  é o número de incrementos de temperatura entre os dois contornos em  $T_1$  e  $T_2$ . O calor total transmitido desde o contorno em  $T_2$  até o contorno em  $T_1$  é igual à soma dos calores transmitidos através de todas as faixas. O calor transmitido é o mesmo dos quadrados numa rede de quadrados curvilíneos. O calor total transmitido pode então ser escrito como

$$q = \sum_{m=1}^{m=M} \Delta q_m = \frac{M}{N} K (T_2 - T_1) \quad (5.19)$$

onde  $\Delta q_m$  é o calor transmitido através da  $m$  - ésima faixa e  $M$  é o número de faixas de fluxo de calor.

Então, para calcular o calor transmitido, precisamos apenas construir uma rede de quadrados curvilíneos no modelo em escala e contar o número de incrementos de temperatura e faixas de fluxo de calor. Apesar de a precisão do método depender bastante da habilidade e da paciência da pessoa que desenha a rede de quadrados curvilíneos, mesmo um esquema grosseiro pode dar uma estimativa razoavelmente boa da distribuição de temperatura, que, se desejado, pode ser refinada pelos métodos numéricos.

Em qualquer sistema bidimensional em que o calor é transferido de uma superfície em  $T_1$  a outra em  $T_2$ , o calor transmitido por unidade de tempo e por unidade de espessura depende apenas da diferença de temperatura  $|T_1 - T_2|$ , da condutibilidade térmica  $K$  e da relação  $(M/N)$ . Essa relação depende da forma do sistema, e é chamada de *fator de forma*  $S$ . O calor transmitido por unidade de tempo pode ser escrito como

$$q = KS\Delta T \quad (5.20)$$



Os valores do fator de forma  $S$  foram calculados para várias formas de significado prático e estão resumidas na tab. 5.1

**Tabela 5.1** fatores de forma de condução.

Configuração	Fatores de forma
Parede plana com superfícies isotérmicas ( $T_1$ e $T_2$ )	$S = A/L = WH/L$ ( $H > L/5$ , $W > L/5$ )
Aresta, elemento de ligação entre duas paredes planas com superfícies isotérmicas.	$S = 0,54W$ ( $w > l/5$ )
Barra com secção transversal quadrada com furo cilíndrico.	$S = 2\pi L / \ln(1,08H/D)$
Cubo de canto, elemento de ligação entre três paredes planas.	$S = 0,54L$
Placa infinita com espessura $2H$ e superfícies isotérmicas ( $T_2$ ), com furo cilíndrico posicionado no centro da placa e apresentando superfície isotérmica, $T_1$ .	$S = 2\pi L / \ln(8H/\pi D)$
Cilindro de comprimento $L$ e diâmetro $D$ com furo cilíndrico posicionado excentricamente.	$S = 2\pi L / \text{Cós}^{-1}(D^2 + d^2 - 4c^2/2Dd)$
Plano semi-infinito, com superfície isotérmica ( $T_2$ ), com furo cilíndrico de comprimento $L$ , paralelo à superfície (normal ao plano da figura) e apresentando temperatura superficial ( $T_1$ ).	$S = 2\pi L / \text{Cós}^{-1}(2H/D)$
Fonte: Adrian Bejan (1996)	Variáveis: $A$ = área, $H$ = altura, $W$ = comprimento, $L$ = largura, $D$ = diâmetro maior, $d$ = diâmetro menor.

### 5.3 MÉTODO NUMÉRICO

Em muitas situações práticas, a geometria do sistema e as condições de contorno são muito complexos para se obter soluções analíticas ou gráficas. Tais problemas podem, no entanto, ser resolvidos por métodos numéricos. Esses métodos estão baseados na técnica de diferenças finitas que são idealmente indicadas para solução através de computadores de alta velocidade. Contudo, antes de se aplicar um método numérico a um problema de transferência de calor ou qualquer outro problema físico descrito por uma equação diferencial, são necessários alguns passos preliminares. O propósito desses passos preliminares é aproximar a equação diferencial e as condições de contorno por um conjunto de equações algébricas. Isso é atingido substituindo-se o domínio contínuo por uma configuração de pontos descritos no domínio e introduzindo-se aproximações de diferenças finitas entre os pontos.

Para resolver numericamente o problema da condução de calor, subdividimos o sistema num número de subvolumes pequenos, mas finitos, e designamos um número de referência a cada um deles. Admitimos então que cada subvolume está à temperatura correspondente a seu centro e substituímos o sistema físico por uma rede de barras condutoras de calor fictícias entre os centros, ou *pontos nodais*, dos subvolumes. Agora, se uma condutância térmica correspondente à condutância do material entre os pontos nodais é admitida para cada barra, o calor transmitido na rede de barras aproximará o calor transmitido no sistema contínuo. Se forem selecionados  $N$  pontos, obter-se-á, um sistema de  $N$  equações algébricas. O sistema de equações pode ser resolvido por inversão de matrizes ou por um método numérico para os valores das incógnitas nos  $N$  pontos.

Na ausência de fontes ou sorvedouros de calor no sistema e, em regime permanente, o calor transmitido para cada ponto nodal deve igualar-se ao calor transmitido para fora do ponto. Para satisfazer essa condição, estabelecemos balanços de calor para cada ponto nodal e, então, obtemos tantas equações algébricas quantas forem os pontos nodais no sistema. Para obter uma solução numérica, primeiro estimamos as temperaturas nos pontos nodais, e então as corrigimos, em passos sucessivos, até que o calor transmitido para um ponto qualquer do sistema iguale-se ao calor transmitido para fora dele.



### 5.3.1 Elementos Finitos

Os seguintes passos são realizados para a solução de um problema de condução de calor bidimensional em regime permanente por elementos finitos.

1. Determinar o modelo matemático completo do problema. Isto inclui a identificação da equação diferencial apropriada e as condições de contorno.
2. Subdividir a configuração usando uma série de linhas de grade ortogonais. As linhas de grade devem coincidir com as fronteiras sempre que possível. Cada intersecção de duas linhas de grade, ou uma linha de grade a uma fronteira, tem um volume de material associado a ele. Estas intersecções são chamadas de nós e são identificadas por números.
3. A equação diferencial e as condições de contorno são aproximadas através de uma equação algébrica de diferença finita para cada nó. As equações resultantes estão em uma forma implícita e contêm as temperaturas do nó em consideração e a temperatura de cada dois nós imediatamente próximas, que estão conectados a ele pela grade ou linhas de contorno.
4. Um conjunto de equações algébricas lineares, uma para cada nó na configuração, é formada. Se existem  $N$  nós na grade, o conjunto consistirá de  $N$  equações que coletivamente contêm as temperaturas dos  $N$  nós, as  $N$  desconhecidas. O conjunto de equações é resolvido simultaneamente por um método direto ou iterativo para obter as temperaturas dos nós.
5. A taxa de transferência de calor através de qualquer superfície pode ser determinada através do uso da temperatura nos nós e a equação de contorno apropriada.

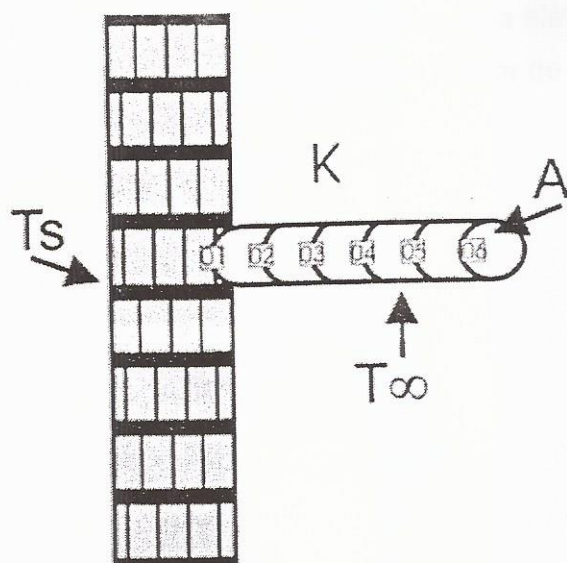


Figura 5.4: Aleta em forma de pino de seção circular subdividida para solução numérica.

#### 5.4 MÉTODO ANALÓGICO

Quando dois ou mais fenômenos podem ser descritos matematicamente pela mesma equação, os fenômenos são ditos análogos, e as variáveis num sistema são chamadas análogas das variáveis correspondentes em qualquer outro sistema. Um simples exemplo de tal caso é a equação de Laplace bidimensional. Ela não só se aplica a um campo de temperaturas, mas, se o símbolos  $T(x, y)$  for substituído por  $E(x, y)$  (o potencial num campo elétrico), obtém-se a equação que governa a distribuição de voltagem num campo potencial. Um exame das respectivas equações,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

mostra que o potencial elétrico  $E(x, y)$ , pode ser considerado como análogo do potencial térmico  $T$ . Em outras palavras, as linhas de voltagem constante num campo elétrico correspondem às linhas de temperatura constante num campo de fluxo de calor. Um meio simples de resolver problemas de condução de calor

bidimensionais é pelo uso da analogia elétrica para construir uma rede de quadrados curvilíneas e, então, determinar o fator de forma [3].



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do que foi exposto, podemos observar que a equação tridimensional de condução de calor nos sólidos é uma equação a derivadas parciais não homogênea, e que para ser resolvida é necessário que se aplique algumas condições de contorno, as quais são retiradas do próprio problema em questão, o que reduz a equação geral à algumas equações particulares: equação de Laplace, de Poisson e de Fourier.

Vimos ainda que a resolução das equações envolvidas é feita empregando-se várias técnicas ou métodos, como por exemplo a separação de variáveis, o método gráfico e o método de elementos finitos.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BEJAN, A. *Transferência de Calor*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [2] BOYCE, W.E.; Diprima, R.C. *Equações Diferenciais elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 3ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara Roogan, 1990.
- [3] KREITH, F. *Princípios da Transmissão de Calor*. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.
- [4] SCHMIDT, F. W.; Henderson, R. R.; Wolgemuth, C.H. *Introdução as ciências térmicas: Termodinâmica, Mecânica dos Fluidos e transferência de calor*. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [5] TIPLER, P.A.; *Física*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara dois, 1982.
- [6] BEJAN, A. *Annual Review of Numerical Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Washington: Hemisphere, 1987.
- [7] <http://www.if.ufrj.br/teaching/fis2/calor/condução.html>.
- [8] AZEVEDO, E.G. *Termodinâmica Aplicada*. Lisboa: Escolar Editora, 1995.
- [9] WYLLEN, G. V.; WONNTAG, R.; BORGNARKE, C. *Fundamentos da Termodinâmica Clássica*. 4ª ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2003.
- [10] ARAÚJO, C. *Transmissão de calor*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.



# DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO TRIDIMENSIONAL DE CONDUÇÃO DE CALOR EM SÓLIDOS E ANÁLISE DE MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO

Dedução da equação tridimensional que caracteriza a condução de calor em sólidos a partir da Primeira Lei da Termodinâmica e a análise de métodos empregados para resolvê-la. A abordagem utiliza a observação de fenômenos físicos da condução de calor e o posterior equacionamento matemático. É feito um estudo sobre a lei de Fourier para a condução de calor unidimensional e também sobre a Primeira Lei da Termodinâmica. A análise de alguns casos particulares da equação geral de condução de calor é realizada com o intuito de apresentar alguns métodos empregados para resolver tais equações.

Autopub Editora  
CNPJ 54.303.895/0001-62  
Telefone: 9198473-5110  
contato@autopubeditora.com  
Ed. Rogélio Fernandez Business Center - Tv.  
Quintino Bocaiúva, 2301 - Batista Campos,  
Belém - PA, 66045-315  
www.autopubeditora.com

